D M I
AP2: Deuxième Année Cycle Préparatoire
Analyse 3: Fonctions de Plusieurs Variables

ENSA d'Al-Hoceima
Année 2020/2021
S 3

Série n° 4
– Différentiabilité et Calcul différentiel –

Exercice 1
1°) Montrer d'aprés la définition que la fonction

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

est différentiable dans $\mathbb{R}^2$ et calculer la différentielle.

---

correction
1°) La fonction f est différentiable au point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - h_1\partial_x f(x_0,y_0) - h_2\partial_y f(x_0,y_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

Dès que:

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = x_0^2 + h_1^2 + 2x_0h_1 + y_0^2 + h_2^2 + 2y_0h_2$$

et

$$\nabla f(x_0,y_0) = (2x_0, 2y_0)$$

la limite se réduit à :

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0$$

Cela suffit pour prouver que f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$
Alors

$$df(x_0,y_0)(h_1,h_2) = 2x_0h_1 + 2y_0h_2$$

2°) L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

est-elle différentiable en $(0,0)$

---

correction 2°)
on a $|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ donc f est continue en $(0,0)$.
On a $f(x,0) = 0$ donc f admet une dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$
De même
$f(0,y) = -y$ donc f admet une dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$

Par l'absurde, supposons que f est différentiable en $(0,0)$. Alors:

$$df(0,0)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).h_2 = -h_2$$

et

$$\varepsilon(x,y) := \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y)}{\|(x,y)\|} \to 0 \quad \text{quand} \quad \|(x,y)\| \to 0$$

Or,

$$\varepsilon(x,y) = \frac{y(x^2-y^2)+y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2yx^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

donc, pour $a, b \in \mathbb{R}^*$, $\varepsilon(ta,tb) \equiv \frac{2ba^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$, ne tend pas vers zéro quand $t \to 0$, **: contradiction**

Donc f n'est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\nvDash$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^3y-xy^3)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

2°) Déterminer si les dérivées partielles $\partial_x f(0,0)$ et $\partial_y f(0,0)$ existent et les calculer le cas échéant.

3°) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

4°) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

CORRECTION.2

1°)

On étudie la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

On utilise les coordonnées polaires pour calculer la limite de f au point $(0;0)$

poson: $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ alors:

$$f(r,\theta) = r^2\cos(\theta)\sin(\theta)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$$

comme

$$|f(r,\theta)| \leq \underset{r\to 0}{2r^2 \to 0}, \quad \forall \theta$$

On en déduit que la limite de $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ est $0 = f(0,0)$.

La fonction est donc continue en $(0,0)$.

De plus, f est continue sur $(\mathbb{R}^*)^2$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$

2°)

• Calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

Donc La dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ existe et est égale à 0.

• Calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = 0$$

Donc La dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$ existe et est égale à 0.

3°)

on doit calculer les dérivées partielles sur le reste du domaine et vérifier si elles sont continues ou non en $(0,0)$ qui est le seul point qui peut poser des problèmes.

• Calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

On utilise les coordonnées polaires pour calculer la limite de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ au point $(0;0)$
poson: $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ alors:

$$y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = r\sin(\theta)(\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) + 4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta))$$

Or

$$|y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}| = |r\sin(\theta)(\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) + 4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta))| \leq 6r$$

Donc

$$r\sin(\theta)(\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) + 4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)) \to 0, \quad \text{quand} r \to 0$$

On en déduit que la limite de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est égale $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.
Donc . La fonction $\partial_x f$ est donc continue en $(0,0)$.
De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

- Calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

On utilise les coordonnées polaires pour calculer la limite de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ au point $(0;0)$
poson: $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ alors:

$$x\frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = r\sin(\theta)(\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) - 4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta))$$

Or

$$|y\frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}| = |r\sin(\theta)(\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) - 4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta))| \leq 6r$$

Donc

$$r\sin(\theta)(\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) - 4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)) \to 0, \quad \text{quand} r \to 0$$

On en déduit que la limite de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est égale $0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.
Donc . La fonction $\partial_y f$ est donc continue en $(0,0)$.
De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

finallement La fonction f est continues sur $\mathbb{R}^2$, elle admets des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On conclut que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4°)

La fonction f est différentiable en $(0,0)$ car elle est de classe $\mathcal{C}^1$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \text{ .} \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en $\mathbb{R}^2$?

2°) Calculer $\nabla f(x,y)$

3°) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?

4°) Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

CORRECTION.3

1°)

La fonction f est continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Elle est aussi continue en $(0,0)$ car:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} r^3\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) = \lim_{r\to 0} r^3 = 0 = f(0,0)$$

Donc f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2°)

• Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

• Pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \\ \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3°)

On a déjà vérifié que la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On utilise les coordonnées polaires pour calculer la limite de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ au point $(0;0)$
poson: $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ alors:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \frac{2r^6(\cos(\theta)\sin^5(\theta))}{r^4} = \lim_{r\to 0} 2r^2 = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On utilise les coordonnées polaires pour calculer la limite de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ au point $(0;0)$
poson: $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ alors:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} \frac{r^6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)(3\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}{r^4} = \lim_{r\to 0} 4r^2 = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Donc la fonction est donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

4°) Puisque toute fonction de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω. on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = x^3 - y^3$$

Dire si le graphe de f :

$$\mathcal{G}_f = \{x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{t.q} \quad z = f(x,y)\}$$

admet un plan tangent au point $(0,1,-1)$ et, le cas échant, donner l'équation du plan.

CORRECTION.4

Dire que le graphe $\mathcal{G}_f$ admet un plan tangent au point $(0,1,-1)$ est équivalent à dire que f est différentiable au point $(0,1)$.
on a la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ et donc différentiable dans $\mathbb{R}^2$.
L'èquation du plan tangent est :

$$\mathrm{T}(x,y) = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)x + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -1 - 3(y-1) = 2 - 3y$$

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en $\mathbb{R}^2$?

2°) Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, calculer ensuite $\nabla f(0,0)$

3°) La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

CORRECTION.5

1°) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mais elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ car si on considère la restriction de f à la courbe $y = x$, qui passe par $(0,0)$, on a

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x} \neq f(0,0)$$

2°) $\nabla f(x,y)$ est le vecteur de composantes $\partial_x f(x,y)$ et $\partial_y f(x,y)$ et on a :

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

et

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ \text{n'est pas définie sur } (x,y) = (0,0) & \end{cases}$$

Car $\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \infty$

3°) N'étant pas continue, f n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \ln(1 - x^2 + 5y)$$

1°) Déterminer D.

2°) Déterminer la différentielle en tout point $(x,y) \in D$

3°) Calculer $d_{(0,2)}f$ en les vecteurs $\overrightarrow{i} = (1,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1)$ et $\overrightarrow{v} = (1,1)$

CORRECTION.6

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \ln(1 - x^2 + 5y)$$

1°)
On a :

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in D &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus 1 - x^2 + 5y > 0 && (1)\\
&\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y > \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}. && (2)
\end{aligned}
$$

Donc

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y > \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}\}$$

Rappelle : Différentielle

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continûment différentiable, par définition, pour tout $x \in D$, l'application

$$\partial_{\bullet} f(x) : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \overrightarrow{v} \longrightarrow \partial_{\overrightarrow{v}} f(x) \end{array}$$

est linéaire.

Définition : cette application linéaire s'appelle la différentielle de f au point x. il est d'usage de la noter df_x.

Soit $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$df_x(\overrightarrow{v}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{x})v_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overrightarrow{x})v_n$$

• Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $x \in D$. La différentielle $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ peut s'écrire de la forme

$$\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \qquad df_x(\overrightarrow{v}) = < \overrightarrow{\nabla} f(x), \overrightarrow{v} >$$

2°)

Pour tout $(x,y) \in D$, on a

$$
\begin{aligned}
df_{(x,y)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy && (3)\\
&= \frac{-2x}{1 - x^2 + 5y}dx + \frac{5}{1 - x^2 + 5y}dy && (4)
\end{aligned}
$$

3 °)

Ainsi

$$df_{(2,0)} = \frac{4}{3}dx - \frac{5}{3}dy$$

et

$$
\begin{aligned}
df_{(2,0)}(\overrightarrow{i}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = \frac{4}{3}\\
df_{(2,0)}(\overrightarrow{j}) &= \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = -\frac{5}{3}\\
df_{(2,0)}(\overrightarrow{v}) = df_{(2,0)}(1,1) &= \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = \frac{-1}{3}
\end{aligned}
$$

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^3 \cos(\frac{1}{x^2+y^2}), & \text{si } (x,y) \neq (0,0);\\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en $\mathbb{R}^2$?

2°) Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, calculer ensuite $\nabla f(0,0)$

3°) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

4°) Sans faire de calculs, que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$

CORRECTION.7
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^3 \cos(\frac{1}{x^2+y^2}), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

1°)
La fonction f est continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car f est un produit de 2 fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
On étudie la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

On utilise les coordonnées polaires pour calculer la limite de f au point $(0;0)$
poson: $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ alors:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \forall\theta}} r^6 \cos\frac{1}{r^2} = 0 = f(0,0)$$

Donc f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$
2°)
• Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x(x^2+y^2)^2\cos(\frac{1}{(x^2+y^2)} + 2x(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{(x^2+y^2)} \\ 6y(x^2+y^2)^2\cos(\frac{1}{(x^2+y^2)} + 2y(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

• Pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \\ \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3°)
On a déjà vérifié que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

On a

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} 6x(x^2+y^2)^2\cos(\frac{1}{(x^2+y^2)} + 2x(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{(x^2+y^2)}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \forall\theta}} 6r^5\cos(\theta)\cos\frac{1}{r^2} + 2r^3\cos(\theta)\sin\frac{1}{r^2} = 0 = \partial_x f(0,0)$$

et

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} 6y(x^2+y^2)^2\cos(\frac{1}{(x^2+y^2)} + 2y(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{(x^2+y^2)}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

et on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \forall\theta}} 6r^5\sin(\theta)\cos\frac{1}{r^2} + 2r^3\sin(\theta)\cos\frac{1}{r^2} = 0 = \partial_y f(0,0)$$

Donc la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$
4°)
Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(x,y) = (\sin(x+2y), \cos(2x+y))$$

1°) Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$

2°) Calculer sa différentielle.

3°) Calculer la matrice Jacobienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$

CORRECTION.8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(x, y) = (\sin(x + 2y), \cos(2x + y))$$

1°)

On note f_1 et f_2 les fonctions coordonnées de f on a donc $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ avec $f_1(x, y) = \sin(x + 2y)$ et $f_2(x, y) = \cos(2x + y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Les fonctions f_1 et f_2 admettent des dérivées partielles par rapport à x et à y en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \cos(x + 2y) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2\cos(x + 2y)$$

et

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = -2\sin(2x + y) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = -\sin(2x + y)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Les dérivées partielles de f_1 et f_2 sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2$
on en déduit que f_1 et f_2 sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$

Comme les fonctions coordonnées de f sont différentiables on conclut que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.

2°) Calculer sa différentielle.

En tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. on a

$$\begin{aligned}
df_{(x,y)}(u, v) &= (df_{(1)(x,y)}(u, v); df_{(2)(x,y)}(u, v)) \\
&= (u\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + v\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y), u\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) + v\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)) \\
&= (u\cos(x + 2y) + 2v\cos(x + 2y), -2u\sin(2x + y) - v\sin(2x + y)).
\end{aligned}$$

3°) la matrice Jacobienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$

pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x + 2y) & 2\cos(x + 2y) \\ -2\sin(2x + y) & -\sin(2x + y) \end{pmatrix}$$